جامعة البعث كلية العلوم قسم الرياضيات	امتحان جبر خطي(١) الفصل الدراسي الثاني العام الدراسي ٠٨ / ٠٩	اسم الطالب: مدة الامتحان: ساعتان العلامة: ثمانون

السؤال الأول: (٤ + ٦ + ٩ + ٦ = ٢٥ درجة)

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&1\\1&2&3\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&0\\0&1&2\end{bmatrix}$$

(١). أوجد معين المصفوفة B باستخدام التعريف (فقط) .

(٢). أوجد كل من $|4B|$ ، $|B^4|$ ، $|B^{-1}|$.

(٣). أوجد A^{-1} باستخدام التحويلات الأولية .

(٤). أوجد المصفوفة C والتي من أجلها يكون $B=(A.C)^t$.

السؤال الثاني: (١٠ + ١٥ = ٢٥ درجة)

(١). عرّف قياس الفضاء الشعاعي، وما هو قياس الفضاء الشعاعي الصفري $\{\theta\}$، (مع الشرح).

(٢). بفرض أن W ، U فضاءان جزئيان من الفضاء الشعاعي R^3 مولّدان، على الترتيب، بالجملتين:

$\{ w_1=(1,0,0) \ , w_2=(3,2,1) \}$ ، $\{ u_1=(1,1,1) \ , u_2=(1,2,3) \}$

١. أوجد قياس كلّ من الفضاءات الجزئية U ، W ، $U+W$.

٢. بيّن ما إذا كان المجموع $U+W$ مجموعاً مباشراً أم لا.

السؤال الثالث: (١٠ درجات)

$$\begin{aligned} x-2y \quad\quad &= 1\\ x-y+\lambda z &= -2\\ \lambda y+4z &= 6 \end{aligned}$$

حدد قيم الوسيط λ والتي من أجلها يكون لجملة المعادلات الخطية السابقة:

(١). حلّ وحيد، (٢). عدد لانهائي من الحلول، (٣). مستحيلة الحل.

السؤال الرابع:(٥ + ١٥ = ٢٠ درجة)

(١). بيّن ما إذا كان التطبيق $f:M_3(R)\to R$ ، والمعرف بالشكل $f(A)=|A|$ ، تطبيقاً خطياً أم لا.

(٢). بفرض $f:R^2\to R^2$ تطبيق خطي معرّف على النحو التالي:

$$f(x,y)=(2x-y\ ,y) \quad ;\forall(x,y)\in R^2$$

اثبت أنّ هذا التطبيق قابل للقلب. ثم أوجد مقلوبه.

٢٠٠٩/٦/١١   د. غسّان نعمه

جامعة البعث
كلية العلوم

سلّم تصحيح جبر خطي(١)
سنة أولى رياضيات

الفصل الدراسي الثاني
للعام الدراسي ٠٨ / ٠٩

السؤال الأول: (٤ + ٦ + ٩ + ٦ = ٢٥ درجة)

(١). في معين المصفوفة B يوجد جداء واحد غير معدوم هو $a_{21} \cdot a_{13} \cdot a_{32} = a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} = 1.1.1 = 1$
وإشارة هذا الجداء هي (+) لأن التبديلة $(3,1,2)$ زوجية. بالتالي $|B|=1$.

(٢).

$$\left|B^{-1}\right| = \frac{1}{|B|} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\left|B^{4}\right| = \left(|B|\right)^{4} = 1^{4} = 1$$

$$|4B| = 4^{3}|A| = 64\ .1 = 64$$

(٣).

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3-2r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2-r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(٤).

$$B = (A.C)^{t} \Rightarrow B^{t} = A.C \Rightarrow$$

$$C = A^{-1}.B^{t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

R1

السؤال الثاني: (١٠ + ١٠ = ٢٠ درجة)

(١). قياس الفضاء الشعاعي هو عدد أشعة أكبر جملة مستقلة خطياً فيه.

إن قياس الفضاء الشعاعي الصفري $\{\theta\}$ يساوي الصفر، لأن أكبر جملة مستقلة خطياً فيه هي الخالية والتي عدد أشعتها يساوي الصفر.

(٢).

١. $d(U)=2$ لأن الفضاء الجزئي U مولّد بالشعاعين $u_1=(1,1,1)$, $u_2=(1,2,3)$ المستقلين خطياً.

$d(W)=2$ لأن الفضاء الجزئي W مولّد بالشعاعين $w_1=(1,0,0)$, $w_2=(3,2,1)$ المستقلين خطياً.

$d(U+W)=3$ لأن الفضاء الجزئي $U+W$ مولّد بالأشعة:

$$u_1=(1,1,1)\ ,\ u_2=(1,2,3)\ ,\ w_1=(1,0,0)\ ,\ w_2=(3,2,1)$$

والتي أكبر جملة مستقلة خطياً فيها هي جملة الأشعة u_1, u_2, w_1 والمكونة من ثلاثة أشعة.

٢. المجموع $U+W$ ليس مجموعاً مباشراً لأنّ:

$$d(U\cap W)=d(U)+d(W)-d(U+W)=2+2-3=1\neq 0$$

السؤال الثالث: (١٠ درجات)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda & -2 \\ 0 & \lambda & 4 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2-r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & -3 \\ 0 & \lambda & 4 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3-\lambda r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & -3 \\ 0 & 0 & 4-\lambda^2 & 6+3\lambda \end{array}\right]$$

(١). يكون للجملة حلّ وحيد إذا كان $4-\lambda^2\neq 0$، أي إذا $\lambda^2\neq 4$، أي إذا $\boxed{\lambda\neq\pm 2}$.

(٢). يكون للجملة عدد لانهائي من الحلول إذا كان $4-\lambda^2=0$ و $6+3\lambda=0$، أي إذا كان $\boxed{\lambda=-2}$.

(٣). تكون الجملة مستحيلة الحل إذا كان $4-\lambda^2=0$ و $6+3\lambda\neq 0$، أي إذا كان $\boxed{\lambda=2}$.

السؤال الرابع: (٥ + ١٥ = ٢٠ درجة)

(١). التطبيق $f: M_{(3,3)}(R)\to R$ ليس تطبيقاً خطياً لأنّ:

$$.f(A_1+A_2)=|A_1+A_2|\neq|A_1|+|A_2|$$

أو لأنّ:

$$.f(\lambda.A)=|\lambda.A|=\lambda^3|A|\neq\lambda.|A|$$

(٢). التطبيق الخطي $f:R^2 \to R^2$ قابل للقلب لأن:

$$\forall (x,y)\in Ker\, f \Rightarrow f(x,y)=(0\,,\,0)$$

لكن، ومن التعريف $f(x,y)=(2x-y\,,\,y)$

من العلاقتين السابقتين نستنتج:

$$(2x-y\,,\,y)=(0\,,\,0)\Rightarrow$$

$$x=0\;,\;y=0\Rightarrow$$

$$(x\,,\,y)=(0\,,\,0)\Rightarrow$$

$$Ker\, f=\{\theta\}$$

لإيجاد مقلوب التطبيق الخطي $f:R^2 \to R^2$ نقوم بالآتي:

- نفرض أن مقلوب التطبيق الخطي هو $f^{-1}:R^2 \to R^2$ وهو معرف بالشكل:

$$f^{-1}(a,b)=(x,y)\Rightarrow$$

$$f(x,y)=(a,b)$$

لكن، وبحسب التعريف، فإن $f(x,y)=(2x-y,\,y)$

من العلاقتين السابقتين نستنتج أن:

$$(a\,,\,b)=(2x-y,\,y)\Rightarrow y=b\,,\,x=\frac{a+b}{2}\Rightarrow$$

$$f^{-1}(a,b)=(\frac{a+b}{2},b)$$

١١/٦/٢٠٠٩

د. غسان نعمه

أسئلة دورات مساعد جبر خطي ١ ٢ / ١٦

جامعة البعث	امتحان جبر خطي(١)	اسم الطالب:
كلية العلوم . قسم الرياضيات	فصل أول للعام الدراسي ٢٠٠٩ / ٢٠١٠	مدة الامتحان: ساعتان

السؤال الأول: (٥ + ٢٠ = 25 درجة)

(١). حدد قيمة كلٍّ من t و k في الجداء التالي حتى يكون جداءً في معين من المرتبة السادسة ومسبوقاً بإشارة (+) :

$$a_{24} \cdot a_{k3} \cdot a_{56} \cdot a_{t2} \cdot a_{31} \cdot a_{45}$$

(٢). لتكن المصفوفتان : $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، والمطلوب إيجاد:

(أ). A^{-1} باستخدام التحويلات الأولية ، (ب). $|A|$ ، (ج). $|A^{-1}|$ ، (د). $|2A|$ ، (هـ). $|A^2|$ ، (و). إيجاد المصفوفة C والتي من أجلها تتحقق العلاقة $(A \cdot C)^t = B$.

السؤال الثاني: (١٠ + ١٠ = 20 درجة)

(١). عرّف قياس الفضاء الشعاعي، ثم عيّن قياس كل من الفضاءات الشعاعية:

$$M_{(3,4)}(\mathbb{R}) \ , \ P_4 \ , \ \{\theta\}$$

(٢). بفرض أن W ، U فضاءان جزئيان من الفضاء الشعاعي R^3 مولَّدان، على الترتيب، بالجملتين:

$$\{u_1 = (1,1,1) \ , u_2 = (1,2,3)\} \ , \ \{w_1 = (1,0,0) \ , w_2 = (3,2,1)\}$$

آ. أوجد قياس كلٍّ من الفضاءات الجزئية U ، W ، $U+W$.

ب. بيّن ما إذا كان المجموع $U+W$ مجموعاً مباشراً أم لا.

السؤال الثالث: (١٠ درجات)

حدّد قيم الوسيط λ حتى تكون الجملة التالية (١). مستحيلة الحل ، (٢). لها حلٌّ وحيد ، (٣). لها عدد لانهائي من الحلول .

$$\begin{aligned} x + y + z &= -1 \\ x + 3y + 2z &= -2 \\ x + 3y + \lambda z &= \lambda \end{aligned}$$

السؤال الرابع: (٦ + ١٩ = ٢٥ درجة)

(١). ليكن التطبيق الخطي $f : V \to U$ حيث أن V و U فضاءان شعاعيان فوق $\mathbb{R}$. برهن أن الشرط اللازم والكافي حتى يكون هذا التطبيق متباينا هو أن يكون $d(f(V)) = d(V)$.

(٢). بفرض $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ تطبيق خطي معرّف على النحو التالي :

$$f(x, y, z) = (y, 2x - y, z) \ ; \ \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

(أ). برهن أن التطبيق الخطي f قابل القلب ، (ب). أوجد مقلوب التطبيق f ، (ج). أوجد رتبة هذا التطبيق الخطي .

د. غسان نعمه

٢٠١٠/١/

جامعة البعث	سلم تصحيح جبر خطي(١)	الفصل الدراسي الأول
كلية العلوم	سنة أولى رياضيات	للعام الدراسي ٠٩ / ١٠

السؤال الأول: (٥ + ٢٠ = ٢٥ درجة)

(١). حتى يكون الجداء a_{45} . a_{31} . a_{12} . a_{56} . a_{k3} . a_{24} جداءً في معين من المرتبة السادسة يجب أن يكون إمّا $k=1\,,\,t=6$ ، أو $k=6\,,\,t=1$. **2**

من أجل الاحتمال $k=1\,,\,t=6$ نحصل على الجداء a_{45} . a_{31} . a_{62} . a_{56} . a_{13} . a_{24} والذي متبادلة أدلة أعمدته (3 , 4 , 1 , 5 , 6 , 2) وهي متبادلة زوجية ، لأن عدد انعكاساتها ٦ انعكاسات ، وإشارة الجداء مع هذا الاحتمال تكون (+) ، وهو الاحتمال الصحيح. **3**

(٢). (آ).

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_2-r_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&0&-1&-1&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_2+r_3}$$

6
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&0&-1&1&1\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_3-r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&0&-1&1&1\\0&0&1&1&-1&0\end{array}\right]\xrightarrow{r_1-r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\0&1&0&-1&1&1\\0&0&1&1&-1&0\end{array}\right]\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\1&-1&0\end{bmatrix}$$

(ب). $|A|=1$ **2**

(ج). $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}=\dfrac{1}{1}=1$ **2**

(د). $|2A|=2^3\,.\,|A|=8\,.\,1=8$ **2**

(هـ). $|A^2|=(\,|A|\,)^2=1^2=1$ **2**

(و). $(A\,.\,C)^t=B \;\Rightarrow\; A\,.\,C=B^t \;\Rightarrow\; C=A^{-1}\,.\,B^t$

ومنه:

6
$$C=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\1&-1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-1&2\\2&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&2\\3&1&4\\-1&0&-1\end{bmatrix}$$

السؤال الثاني: (١٠ + ١٠ = ٢٠ درجة)

4

(١). قياس الفضاء الشعاعي هو عدد أشعة أكبر جملة مستقلة خطياً فيه.

2

. قياس الفضاء الشعاعي الصفري $\{\theta\}$ يساوي الصفر.

2

. قياس الفضاء الشعاعي P_4 يساوي ٥ .

2

. قياس الفضاء الشعاعي $M_{(3,4)}(\mathbf{R})$ يساوي ١٢ .

(٢). آ.

. $d(U)=2$ لأن الشعاعين $u_1=(1,1,1)$, $u_2=(1,2,3)$ المولدين للفضاء الجزئي U يشكلان جملة مستقلة خطيا .

2

ـ $d(W)=2$ لأن الشعاعين $w_1=(1,0,0)$, $w_2=(3,2,1)$ المولدين للفضاء الجزئي W يشكلان جملة مستقلة خطيا .

2

. $d(U+W)=3$ لأن الفضاء الجزئي $U+W$ مولّد بجملة الأشعة:

$$\{u_1=(1,1,1)\ ,\ u_2=(1,2,3)\ ,\ w_1=(1,0,0)\ ,\ w_2=(3,2,1)\}$$

والتي أكبر جملة مستقلة خطياً فيها هي جملة الأشعة $\{u_1, u_2, w_1\}$ والمكونة من ثلاثة أشعة. 2

ب. المجموع $U+W$ ليس مجموعاً مباشراً لأنّ:

4

$$d(U\cap W)=d(U)+d(W)-d(U+W)=2+2-3=1\neq 0$$

السؤال الثالث: (١٠ درجات)

4

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&-1\\1&3&2&-2\\1&3&\lambda&\lambda\end{array}\right]\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&-1\\0&2&1&-1\\0&2&\lambda-1&\lambda+1\end{array}\right]\xrightarrow{r_3-r_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&-1\\0&2&1&-1\\0&0&\lambda-2&\lambda+2\end{array}\right]$$

2

(١). تكون الجملة مستحيلة الحل إذا كان $\lambda-2=0$ ، و $\lambda+2\neq 0$ ، أي إذا كان $\lambda=2$.

2

(٢). يكون للجملة حلّ وحيد إذا كان $\lambda-2\neq 0$ ، أي إذا كان $\lambda\neq 2$.

(٣). يكون للجملة عدد لانهائي من الحلول إذا كان $\lambda-2=0$ ، و $\lambda+2=0$ ، أي إذا كان $\lambda=2$ ، و $\lambda=-2$ ، وهذا مستحيل ، أي أن هذه الجملة لا يمكن أن تكون مستحيلة الحل.

2

١٣

٤٤

السؤال الرابع:(٦ + ١٩ = ٢٥ درجة)

(١). ليكن التطبيق الخطي $f:V \to U$ حيث أن V ، و U فضاءان شعاعيان فوق $\mathbf{R}$.عندئذ:

($\Leftarrow$) إذا كان f متبايناً فإن $ker f=\{\theta\}$ ، وبالتالي $d(ker f)=0$ ، عندئذ نحصل من العلاقة :

$$d(V)=d(f(V))+d(\ker f)$$

على :

$$d(f(V))=d(V)-d(\ker f)=d(V)-0 \Rightarrow$$

3

$$d(f(V))=d(V)$$

($\Rightarrow$) إذا كان $d(f(V))=d(V)$ فنحصل من العلاقة:

$$d(V)=d(f(V))+d(\ker f)$$

على :

$$d(\ker f)=d(V)-d(f(V))=0$$

3

ما يعني أن $ker f=\{\theta\}$ ، وبالتالي فإن f يكون متبايناً.

(٢).

(أ). يكون التطبيق الخطي $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ قابلاً للقلب إذا كان $ker f=\{\theta\}$.

3

$$\forall(x,y,z)\in ker f \Rightarrow$$
$$f(x,y,z)=(0,0,0)$$

من ناحية ثانية $f(x,y,z)=(y,2x-y,z)$

من العلاقتين الأخيرتين نحصل على:

3

$$(y,2x-y,z)=(0,0,0) \Rightarrow$$
$$x=0,\ y=0,\ z=0 \Rightarrow$$
$$(x,y,z)=(0,0,0)=\theta \Rightarrow$$
$$ker f=\{\theta\}$$

ما يعني أن التطبيق الخطي $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ قابل للقلب .

(ب). نفرض أن مقلوب التطبيق الخطي $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ هو :

$$f^{-1}:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$$

ومعرّف بالشكل:

2

$$f^{-1}(x,y,z)=(a,b,c)\ ;\ \forall(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \qquad (1)$$

من العلاقة السابقة نستنتج أن:

$$f(a,b,c)=(x,y,z) \qquad (2)$$ 2

لكن ، وبحسب تعريف التطبيق الخطي f ، نجد أن:

$$f(a,b,c)=(b,2a-b,c) \qquad (3)$$ 1

من العلاقتين (2) ، و (3) نستنتج أن:

$$(b,2a-b,c)=(x,y,z) \Rightarrow$$
$$b=x \ , \ c=z \ , \ a=\frac{x+y}{2}$$ 1

ما يعني أن :

$$f^{-1}(x,y,z)=(\frac{x+y}{2},x,z) \ ; \ \forall (x,y,z)\in \mathbb{R}^3$$ 1

(ج). رتبة هذا التطبيق الخطي تعرف بالعلاقة:

$$rank(f)=d\left(f(\mathbb{R}^3)\right)$$ 2

وجدنا في الطلب (أ) أن $ker f=\{\theta\}$ ، وهذا يعني أن $d(ker f)=0$ ، وبالتالي نحصل من العلاقة:

$$d(\mathbb{R}^3)=d\left(f(\mathbb{R}^3)\right)+d(\ker f)$$ 2

على العلاقة:

$$d\left(f(\mathbb{R}^3)\right)=d(\mathbb{R}^3)-d(\ker f)$$
$$=3-0=3$$ 2

ما يعني أن :

$$rank(f)=3$$

د. غسان نحلة

٢١ / ١ / ٢٠١٠

جامعة البعث
كلية العلوم . قسم الرياضيات

امتحان جبر خطي(١)
فصل ثاني العام الدراسي 10/09

اسم الطالب:
الدرجة: (80)

السؤال الأول: (٥ + ٥ + ٥ + ٥ + ٥ = 25 درجة)

(١). صنّف المصفوفات التالية ، بحسب انتمائها إلى كل من المجموعات :

(١) الواحدية ، (٢) المتناظرة ، (٣) الهرميتية ، (٤) المتناظرة عكسياً ، (٥) ذات الشكل المثلثي .

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix} ,\quad B=\begin{bmatrix}0&2-3i\\-2+3i&0\end{bmatrix} ,\quad C=\begin{bmatrix}3&-4\\-4&7\end{bmatrix} ,\quad D=\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix} ,\quad F=\begin{bmatrix}1&7\\0&1\end{bmatrix}$$

(٢). بفرض أن A مصفوفة مربعة ، وأن $A^4 = 0$ ، برهن أن :

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + A^3$$

(٣). حدّد قيمة كلّ من t , k في الجداء التالي حتى يكون جداءً في معين من المرتبة السادسة ومسبوقاً بإشارة (+) :

$$a_{24} \cdot a_{k3} \cdot a_{56} \cdot a_{t2} \cdot a_{31} \cdot a_{45}$$

(٤). أوجد قيمة r حتى يكون $A.B^T = 0$ ، حيث :

$$A=[r \quad 1 \quad -2] \quad , \quad B=[1 \quad 3 \quad -1]$$

(٥). بفرض لدينا المصفوفتان $A=[a_{ij}]_{(m,n)}$ ، $B=[b_{ij}]_{(n,q)}$. أكتب العلاقة التي تعطي قيمة العنصر الذي يقع في السطر الثامن والعمود الخامس من مصفوفة الجداء $A.B$.

السؤال الثاني: (٨ + ١٢ = 20 درجة)

(١). عرّف قياس الفضاء الشعاعي ، وما هو قياس الفضاء الشعاعي الصفري $\{\theta\}$ ، (مع الشرح) .

(٢). بفرض أن U ، W فضاءان جزئيان من الفضاء الشعاعي R^4 ، ومولدان ، على الترتيب ، بالجملتين:

$\{w_1=(-1,-1,1,-1) , w_2=(2,2,0,2)\}$ ، $\{u_1=(1,1,1,1) , u_2=(-1,-2,0,1)\}$

بيّن ما إذا كان المجموع $U + W$ مجموعاً مباشراً أم لا .

السؤال الثالث: (10 درجات)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 &= -3\\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0\\ 2x_1 + kx_2 - x_3 &= -6\end{aligned}$$

حدد قيم k في جملة المعادلات الخطية السابقة حتى تكون هذه الجملة :

١. غير مشتركة ، ٢. الجملة حل وحيد ، ٣. الجملة عدد لانهائي من الحلول .

السؤال الرابع: (٦ + ١٩ = 25 درجة)

(١). ليكن التطبيق الخطي $f : V \to U$ حيث أن V ، و U فضاءان شعاعيان فوق R . برهن أنّ الشرط اللازم والكافي حتى يكون هذا التطبيق متبايناً هو أن يكون $d(f(V)) = d(V)$.

(٢). بفرض $f : R^2 \to R^2$ تطبيق خطي معرّف على النحو التالي :

$$f(x, y) = (x - y, -3x + 5y) \quad ; \forall (x, y) \in R^2$$

(أ). برهن أن التطبيق الخطي f قابل للقلب ، (ب). أوجد مقلوب التطبيق f ، (ج). أوجد رتبة هذا التطبيق الخطي .

٢٠١٠/٦/٩

د. غسّان نصه

١٣

جامعة البعث كلية العلوم	سلّم تصحيح جبر خطي(١) سنة أولى رياضيات	الفصل الدراسي الأول للعام الدراسي ٠٩ / ١٠

السؤال الأول: (٢٥ درجة)

(١).

(١) الواحدية: لا يوجد ، (٢) المتناظرة: A, C ، (٣) الهرميتية: D ، (٤) المتناظرة عكسياً: B, D ،

(٥) ذات الشكل المثلثي: F . 5

(٢). إن $E + A + A^2 + A^3$ $(E - A)^{-1} =$ لأن:

$$(E - A).(E + A + A^2 + A^3) = E + A + A^2 + A^3 - A - A^2 - A^3 - A^4 = E$$ 5

(٣). حتى يكون الجداء $a_{45} \cdot a_{31} \cdot a_{t2} \cdot a_{56} \cdot a_{k3} \cdot a_{24}$ جداءً في معين من المرتبة السادسة يجب أن يكون إمّا $k = 1, t = 6$ ، أو $k = 6, t = 1$. 2

من أجل الاحتمال $k = 1, t = 6$ نحصل على الجداء $a_{45} \cdot a_{31} \cdot a_{62} \cdot a_{56} \cdot a_{13} \cdot a_{24}$ والذي متبادلة أدلة أعمدته $(3, 4, 1, 5, 6, 2)$ وهي متبادلة زوجية ، لأن عدد انعكاساتها ٦ انعكاسات ، وإشارة الجداء مع هذا الاحتمال تكون (+)، وهو الاحتمال الصحيح. 3

(٤). $A . B^T = 0 \Rightarrow [r \quad 1 \quad -2] . \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = [r + 3 + 2] = [r + 5] = [0] \Rightarrow$ 5

$r + 5 = 0 \Rightarrow r = -5$

(٥). إذا رمزنا للعنصر الذي يقع في السطر الثامن والعمود الخامس من مصفوفة الجداء $A.B$ بالرمز c_{85} فيكون :

$$c_{85} = a_{81}b_{15} + a_{82}b_{25} + a_{83}b_{35} + \ldots + a_{8n}b_{n5}$$ 5

السؤال الثاني: (٨ + ١٢ = ٢٠ درجة)

(١). قياس الفضاء الشعاعي هو عدد أشعة أكبر جملة مستقلة خطياً فيه. 4

قياس الفضاء الشعاعي الصفري $\{\theta\}$ يساوي الصفر . 2

لأن أكبر جملة مستقلة خطياً فيه هي المجموعة الخالية . 2

(٢). لمعرفة ما إذا كان المجموع $U+W$ مجموعاً مباشراً أم لا علينا الاستفادة من العلاقة :

$$d(U \cap W) = d(U) + d(W) - d(U+W)$$

من الجملتين المولدتين للفضائين الجزئيين U ، W نجد أن:

$$d(U) = 2 \quad \boxed{2}$$

$$d(W) = 2 \quad \boxed{2}$$

$$d(U+W) = 3 \quad \boxed{3}$$

وبالتالي يكون :

$$d(U \cap W) = d(U) + d(W) - d(U+W) = 2 + 2 - 3 = 1$$

ما يعني أن $U \cap W \neq \{\theta\}$ ، أي أن المجموع $U+W$ ليس مجموعاً مباشراً . 5

السؤال الثالث: (١٠ درجات)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & k & -1 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & k-2 & 5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3-(k-2)r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 15-5k & 12-6k \end{array}\right] \quad \boxed{4}$$

(١). تكون الجملة مستحيلة الحل إذا كان $15-5k=0$ ، و $12-6k \neq 0$، أي إذا كان $k=3$. 2

(٢). يكون للجملة حلّ وحيد إذا كان $15-5k \neq 0$، أي إذا كان $k \neq 3$. 2

(٣). يكون للجملة عدد لانهائي من الحلول إذا كان $15-5k=0$، و $12-6k=0$ ، وهذا مستحيل ، ما يعني أن هذه الجملة لا يمكن أن تكون مستحيلة الحل. 2

السؤال الرابع:(٦ + ١٩ = ٢٥ درجة)

(١). ليكن التطبيق الخطي $f:V \to U$ حيث أن V ، و U فضاءان شعاعيان فوق R .عندئذ:

($\Leftarrow$) إذا كان f متبايناً فإن $kerf=\{\theta\}$ ، وبالتالي $d(kerf)=0$ ، عندئذ نحصل من العلاقة :

$$d(V)=d(f(V))+d(\ker f)$$

على :

$$d(f(V))=d(V)-d(\ker f)=d(V)-0 \Rightarrow$$

3

$$d(f(V))=d(V)$$

($\Rightarrow$) إذا كان $d(f(V))=d(V)$ فنحصل من العلاقة:

$$d(V)=d(f(V))+d(\ker f)$$

على :

$$d(\ker f)=d(V)-d(f(V))=0$$

3

أي أن $kerf=\{\theta\}$ ، وبالتالي فإن f يكون متبايناً.

.(٢)

(أ). يكون التطبيق الخطي $f:R^2 \to R^2$ قابلاً للقلب إذا كان $kerf=\{\theta\}$.

3

$$\forall(x,y)\in kerf \Rightarrow$$
$$f(x,y)=(0,0)$$

من ناحية ثانية

$$f(x,y)=(x-y,-3x+5y)$$

من العلاقتين الأخيرتين نحصل على:

$$(x-y,-3x+5y)=(0,0) \Rightarrow$$
$$x-y=0 \quad , \quad -3x+5y=0$$

بالحل المشترك لجملة المعادلتين الأخيرتين ينتج :

2

$$x=0\ ,\ y=0 \quad \Rightarrow$$
$$(x,y)=(0,0)=\theta \Rightarrow$$
$$ker f=\{\theta\}$$

ما يعني أن التطبيق الخطي $f:R^2 \to R^2$ قابل للقلب .

(ب). نفرض أن مقلوب التطبيق الخطي $f:R^2 \to R^2$ هو :

$$f^{-1}:R^2 \to R^2$$

ومعرّف بالشكل:

2

$$f^{-1}(x,y)=(a,b) \quad ;\ \forall(x,y)\in R^2 \qquad (1)$$

من العلاقة السابقة نستنتج أن:

1 (2) $$f(a, b) = (x, y)$$

لكن ، وبحسب تعريف التطبيق الخطي f ، نجد أن:

1 (3) $$f(a, b) = (a-b, -3a+5b)$$

من العلاقتين (2) ، و (3) نستنتج أن:

1 $$(a-b, -3a+5b) = (x, y) \Rightarrow$$
$$a-b = x \quad , \quad -3a+5b = y$$

بالحل المشترك لجملة المعادلتين الأخيرتين ينتج :

2 $$a = \frac{5x+y}{2} \quad , \quad b = \frac{3x+y}{2}$$

ما يعني أن :

2 $$f^{-1}(x, y) = \left(\frac{5x+y}{2}, \frac{3x+y}{2}\right) \; ; \; \forall (x, y) \in R^2$$

(ج). وجدنا في الطلب (أ) أن $ker f = \{\theta\}$ ، وهذا يعني أن $d(ker f) = 0$ ، وبالتالي نحصل من العلاقة:

2 $$d(R^2) = d(f(R^2)) + d(ker f)$$

على العلاقة:

2 $$d(f(R^2)) = d(R^2) - d(ker f)$$
$$= 2 - 0 = 2$$

وبالتالي يكون :

1 $$rank(f) = 2$$

٢٠١٠ / ١ / ٢١

د. غسّان نعمه

اسم الطالب:
مدة الامتحان: ساعتان
العلامة: (100)

امتحان جبر خطي (1)
الدورة الإضافية
للعام الدراسي 2012 / 2013

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

السؤال الأول: (14+11+7+6+6+6 = 50 درجة)

(I). صنّف المصفوفات التالية، بحسب انتمائها إلى كل من المجموعات:

(1). ذات الشكل المثلثي، (2). المتناظرة، (3). المتناظرة عكسياً، (4). الهرميتية، (5). الهرميتية عكسياً.

$$A_1=\begin{bmatrix}0 & i\\ i & 0\end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 2\end{bmatrix},\ A_3=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix},\ A_4=\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix},\ A_5=\begin{bmatrix}0 & -1+i\\ 1-i & 0\end{bmatrix}$$

(II). لتكن المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -5 & -3 & 5\\ 2 & -1 & 2\end{bmatrix}$. والمطلوب، أوجد كلاً من:

$$(1).\ |A|\ ,\quad (2).\ |A^{45}|\ ,\quad (3).\ |5A|\ ,\quad (4).\ 5|A|\ ,\quad (5).\ |A^{-1}|$$

~~(III). أوجد مقلوب المصفوفة A باستخدام التحويلات الأولية.~~

(IV). أكتب المصفوفة A على شكل مجموع مصفوفتين مربعتين، واحدة مصفوفة متناظرة والثانية متناظرة عكسياً.

(V). بفرض أننا نريد إضافة السطر الأول من المصفوفة A ، بعد ضربه بالعدد 3 ، إلى السطر الثالث في A . أكتب المصفوفة البسيطة B التي يجب أن نضرب بها المصفوفة A حتى يتحقق التحويل الأولي السابق على المصفوفة A . ثم لنذكر الجهة التي يجب أن نضرب بها المصفوفة A بالمصفوفة البسيطة B .

(VI). أوجد إشارة الجداء $a_{41}\cdot a_{16}\cdot a_{54}\cdot a_{33}\cdot a_{25}\cdot a_{62}$ في معين من المرتبة السادسة.

السؤال الثاني: (10+20+20= 50 درجة)

(I). لتكن جملتا الأشعة، الأولى $\{f=-x^3+2x^2-5\ ,\ h=2x^3-4x^2+10\}$ من فضاء كثيرات الحدود التي درجة كل منها أصغر أو يساوي 3، والثانية $\left\{A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 0 & 6\end{bmatrix}\right\}$ من الفضاء الشعاعي $M_2(R)$. بيّن (مع التعليل) أيّاً من الجملتين السابقتين هي جملة مستقلة خطياً وأيّاً منهما مرتبطة خطياً.

(II). لتكن $W_1=\{(a,b,c)\ ;\ a+b+c=0\}\ ,\ W_2=\{(a,b,c)\ ;\ a\geq 0\}$ مجموعتين جزئيتين من الفضاء الشعاعي R^3 . بيّن (مع البرهان) أيّاً من هاتين المجموعتين الجزئيتين هي فضاء شعاعي جزئي في R^3 وأيّاً منهما ليست فضاءً جزئياً.

(III). بفرض أنّ U, W فضاءان جزئيان من الفضاء الشعاعي R^3 مولّدان، على الترتيب، بالجملتين:

$$\{u_1=(1,2,1)\ ,\ u_2=(1,3,3)\}\ ,\ \{w_1=(1,0,1)\ ,\ w_2=(2,1,1)\}$$

والمطلوب:

بيّن ما إذا كان المجموع $U+W$ مجموعاً مباشراً أم لا.

السؤال الأول: (50 درجة)

(I). .... (14=2+2+4+4+2 درجة)

(1) ذات الشكل المثلثي: A_2 ، (2) المتناظرة: A_3 , A_1 ، (3) المتناظرة عكسياً: A_5 , A_4 , (4) الهرميتية: A_4 ، (5) الهرميتية عكسياً: A_1.

(II). .... (11=2+2+2+2+3 درجة)

(1). $|A| = -6 + 0 + 0 - 0 - 0 + 5 = -1$

(2). $|A^{45}| = (|A|)^{45} = (-1)^{45} = 1$

(3). $|5A| = 5^3 . |A| = 125 . (-1) = -125$

(4). $5|A| = 5 . |A| = 5 . (-1) = -5$

(5). $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{-1} = -1$

(III). .... (7 درجات)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+5r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3-3r_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 11 & 1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2+2r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 20 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 11 & 1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[-r_3]{-r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -20 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & -1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -20 & -2 & 5 \\ -11 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(IV). .... (6 درجات)

إن:

$$A = A_1 + A_2$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-5}{2} & 1 \\ \frac{-5}{2} & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} & -1 \\ \frac{-5}{2} & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

(V). .... (6 درجات)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

والضرب من جهة اليسار.

(VI). .... (6 درجات)

لإيجاد إشارة الجداء $a_{41} . a_{16} . a_{54} . a_{33} . a_{25} . a_{62}$ في معين من المرتبة الخامسة نرتب مضاريب هذا الجداء وفق الترتيب الطبيعي للأسطر ، أي على الشكل:

$$a_{16} . a_{25} . a_{33} \ a_{41} . a_{54} . a_{62}$$

فتكون إشارة هذا الجداء موجبة إذا كانت متبادلة أدلة أعمدته زوجية ، وتكون إشارته سالبة إذا كانت متبادلة أدلة أعمدته فردية.

إن متبادلة أدلة أعمدة الجداء هي:

$$(6 \ 5 \ 3 \ 1 \ 4 \ 2)$$

وهي زوجية لأن عدد انعكاساتها عدد زوجي وهو 12 . بالتالي فإشارة هذا الجداء هي (+) .

السؤال الثاني: (50 درجة)

(I). .... (5+5=10 درجات)

الجملة $\{ f = -x^3 + 2x^2 - 5 \ , \ h = 2x^3 - 4x^2 + 10 \}$ مرتبطة خطياً لأن شعاعي هذه الجملة متناسبان، أي لأن h $f = -\frac{1}{2} h$.

بينما الجملة $\left\{ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} , \ B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \right\}$ فهي مستقلة خطياً لأن شعاعي هذه الجملة غير متناسبان.

(II). .... (10+10=20 درجة)

• المجموعة الجزئية $W_1 = \{ (a , b , c) \ ; \ a + b + c = 0 \}$ فضاء جزئي في R^3 لأن :

1) $\forall\ v_1\ ,\ v_2 \in W_1 \Rightarrow$

$v_1 = (a_1, b_1, c_1)\ ;\ a_1 + b_1 + c_1 = 0\ ,\ v_2 = (a_2, b_2, c_2)\ ;\ a_2 + b_2 + c_2 = 0\ \Rightarrow$

$v_1 + v_2 = (a_1 + a_2\ ,\ b_1 + b_2\ ,\ c_1 + c_2) \in W_1$

لأن:

$$. a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 = (a_1 + b_1 + c_1) + (a_2 + b_2 + c_2) = 0 + 0 = 0$$

2) $\forall\ v \in W_1\ ,\ \forall\ \alpha \in R \quad \Rightarrow \quad v = (a,b,c)\ ;\ a + b + c = 0 \quad \Rightarrow$

$\alpha . v = \alpha .(a,b,c) = (\alpha a, \alpha b, \alpha c) \in W_1$

لأن :

$$\alpha a + \alpha b + \alpha c = \alpha(a + b + c) = \alpha .0 = 0$$

• المجموعة الجزئية $W_2 = \{(a\ ,\ b\ ,\ c)\ ;\ a \geq 0\}$ ليست فضاءً جزئياً في R^3 ، لأننا لو أخذنا ، على سبيل مثال، الشعاع $w = (1,2,3)$ من المجموعة الجزئية W_2 والعدد الحقيقي $\alpha = -1$ لوجدنا أن:

$$\alpha . w = (-1).(1,2,3) = (-1,-2,-3) \notin W_2$$

لأن المركبة الأولى للشعاع $\alpha . w = (-1,-2,-3)$ أصغر من الصفر.

(III) .... (4+4+6+6=20 درجة)

$d(U) = 2$ لأن الشعاعين $u_1 = (1,2,1)\ ,\ u_2 = (1,3,3)$ المولدين للفضاء الجزئي U يشكلان جملة مستقلة خطيا كونهما غير متناسبين.

$d(W) = 2$ لأن الشعاعين $w_1 = (1,0,1)\ ,\ w_2 = (2,1,1)$ المولدين للفضاء الجزئي W يشكلان جملة مستقلة خطيا كونهما غير متناسبين.

إن الفضاء الجزئي $U + W$ مولّد بجملة الأشعة:

$$u_1 = (1,2,1)\ ,\ u_2 = (1,3,3)\ ,\ w_1 = (1,0,1)\ ,\ w_2 = (2,1,1)\}$$

وبالتالي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1,\ r_4 - 2r_1]{r_2 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4 + 3r_2]{r_3 + 2r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4 - \frac{5}{4}r_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ما يعني أن $d(U + W) = 3$.

وبالتالي يكون:

$$d(W_1 + W_2) = d(W_1) + d(W_2) - d(W_1 \cap W_2) \quad \Rightarrow$$

$$d(W_1 \cap W_2) = d(W_1) + d(W_2) - d(W_1 + W_2) \quad \Rightarrow$$

$$d(W_1 \cap W_2) = 2 + 2 - 3 = 1$$

ما يعني أن المجموع $W_1 + W_2$ هو مجموع غير مباشر.

جامعـــة البعث
كليـــة العـــلوم
قسم الرياضيات

امتحان جبر خطي (1)
الدورة الفصلية الأولى
للعام الدراسي 2013 / 2014

اسم الطالب:
مدة الامتحان: ساعتان
العلامة: (100

السؤال الأوّل: (15+ 20+15=50 درجة)

(I). عرّف المصفوفات: المثلثية السفلى، المتناظرة عكسياً، الهرميتية عكسياً، وأعطِ مثالاً على كلّ نوع من هذه الأنواع.

(II). لتكن المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

والمطلوب، أوجد كلاً من:

(1). مقلوب المصفوفة A باستخدام التحويلات الأولية ، (2). A^{-2} ، (3). $|A|$ ، (4). $|A^{-3}|$

(III). أجب على السؤالين التاليين:

(1). حلّ المعادلة المصفوفية التالية:

$$AX + I = 2A$$

مع العلم بأنّ A هي المصفوفة الواردة في الطلب الأول .

(2). أوجد إشارة الجداء $a_{21} \cdot a_{42} \cdot a_{34} \cdot a_{53} \cdot a_{15}$ في معين من المرتبة الخامسة.

السؤال الثاني: (10+20+20=50 درجة)

(I). ليكن الشعاعان $u = 1 + i$, $v = i$. بيّن ما إذا كان هذان الشعاعان :

(1). يشكلان جملة مستقلة خطياً ، أم مرتبطة خطياً ، في الفضاء الشعاعي العقدي C المعرف فوق الحقل C .

(2). يشكلان جملة مستقلة خطياً ، أم مرتبطة خطياً ، في الفضاء الشعاعي العقدي C المعرف فوق الحقل R .

(II). أجب على السؤالين التاليين:

(1). بيّن **(مع التعليل)** أيّاً من الجملتين التاليتين يمكن أن تكون قاعدة للفضاء الشعاعي R^3 .

$$A = \{ v_1 = (2,4,6) \ , v_2 = (1,4,5) \ , v_3 = (-1,-2,-3) \} \ , \ B = \{ u_1 = (1,0,6) \ , u_2 = (1,2,3) \}$$

(2). **بفرض أن جملة الأشعة** w , u , v جملة مستقلة خطياً في فضاء شعاعي ما V والمعرّف فوق الحقل K . **ما إذا كانت جملة الأشعة** $x_1 = v + u + w$, $x_2 = u + w$, $x_3 = w$ جملة مرتبطة خطياً أم مستقلة خطي[illegible] **الفضاء الشعاعي V.**

(III). ليكن لدينا الفضائين الشعاعيين الجزئيين من الفضاء R^3 [illegible] $=\{ v \in R^3 \ ; \ v = \alpha.(1,1,1)$ [illegible]
والثاني W_2 المولّد بجملة الأشعة $\{ u_1$ [illegible] $, u_2 = (1,1,-1) \ , u_3 = (2,3,0) \}$ ، والمطلوب:

(1). أوجد قياس كل من الفضائين الشعاعيين الجزئيين W_1 , W_2 .

(2). بيّن ما إذا كان مجموع الفضائين الشعاعيين الجزئيين W_1 , W_2 مجموعاً مباشراً أم لا .

السؤال الأول: (15+ 20+15=50 درجة)

.(I)

- تعريف المصفوفة المثلثية السفلى + المثال .... (3+2=5 درجات)
- تعريف المصفوفة المتناظرة عكسياً+ المثال .... (3+2=5 درجات)
- تعريف المصفوفة الهرميتية عكسيا + المثال .... (3+2=5 درجات)

.(II) .... (8+4+4+4=20 درجة)

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2+2r_1} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3+r_2} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-2r_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-r_3]{r_1+2r_3} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

.(1)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

.(2)
$$A^{-2} = [A^{-1}]^2 = \begin{bmatrix} 27 & -2 & -12 \\ -16 & 1 & 7 \\ -9 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

.(3) $|A| = -1$

.(4) $\left|A^{-3}\right| = \left|A^{-1}.A^{-1}.A^{-1}\right| = \left|A^{-1}\right|.\left|A^{-1}\right|.\left|A^{-1}\right| = (-1).(-1).(-1) = -1$

.(III) .... (8+7=15 درجة)

.(1)

$$AX + I = 2A \Rightarrow$$

$$X = A^{-1}[2A - I] = 2I - A^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(2). لإيجاد إشارة الجداء $a_{21} \cdot a_{42} \cdot a_{34} \cdot a_{53} \cdot a_{15}$ في معين من المرتبة الخامسة نرتب مضاريب هذا الجداء وفق الترتيب الطبيعي للأسطر ، أي على الشكل:

$$a_{15} \cdot a_{21} \cdot a_{34} \cdot a_{42} \cdot a_{53}$$

فتكون إشارة هذا الجداء موجبة إذا كانت متبادلة أدلة أعمدته زوجية ، وتكون إشارته سالبة إذا كانت متبادلة أدلة أعمدته فردية.

إن متبادلة أدلة أعمدة الجداء هي:

$$(5 \;\; 1 \;\; 4 \;\; 2 \;\; 3)$$

وهي زوجية لأن عدد انعكاساتها عدد زوجي وهو 6 . بالتالي فإشارة هذا الجداء هي (+) .

السؤال الثاني: (10+20+20=50 درجة)

(I). .... (5+5=10 درجات)

(1). الشعاعان $u = 1 + i$, $v = i$ يشكلان جملة مرتبطة خطياً في الفضاء الشعاعي C المعرف فوق حقل الأعداد العقدية C لأنهما متناسبان في هذا الفضاء .

(2). الشعاعان $u = 1 + i$, $v = i$ يشكلان جملة مستقلة خطياً في الفضاء الشعاعي C المعرف فوق حقل الأعداد الحقيقية R لأنهما غير متناسبان في هذا الفضاء .

(II). .... (10+10=20 درجة)

(1). الجملة $A = \{ v_1 = (2,4,6) \; , \; v_2 = (1,4,5) \, , \, v_3 = (-1,-2,-3) \}$ لا يمكن أن تكون قاعدة للفضاء الشعاعي R^3 لأنها مرتبطة خطياً.

والجملة $B = \{ u_1 = (1,0,6) \; , \; u_2 = (1,2,3) \}$ لا يمكن أن تكون قاعدة للفضاء الشعاعي R^3 لأنها مكونة من أقل من ثلاثة أشعة.

(2).

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \theta \;\; \Rightarrow$$
$$\alpha_1 (v + u + w) + \alpha_2 \, (u + w) + \alpha_3 w = \theta \;\; \Rightarrow$$
$$\alpha_1 v + (\alpha_1 + \alpha_2) \, u + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) w = \theta$$

ولأن جملة الأشعة w , u , v جملة مستقلة خطياً ، ينتج من العلاقة الأخيرة أن:

$$\alpha_1 = 0$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

وبالحل المشترك لجملة المعادلات السابقة نجد أن:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

ما يعني أن جملة الأشعة $v_1 = v + w \; , \; v_2 = u \; , \; v_3 = v + u - w$ جملة مستقلة خطياً .

(III). .... **(10+10=20 درجة**

(1). إن $d(W_1) = 1$ لأنه مولد بالجملة وحيدة الشعاع $(1,1,1)$ المستقلة خطياً كون هذا الشعاع مغاير للصفر .

وإن $d(W_2) = 2$ لأن:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2). إن $d(W_1 + W_2) = 3$ لأن:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

وبالتالي يكون:

$$d(W_1 + W_2) = d(W_1) + d(W_2) - d(W_1 \cap W_2) \quad \Rightarrow$$
$$d(W_1 \cap W_2) = d(W_1) + d(W_2) - d(W_1 + W_2) \quad \Rightarrow$$
$$d(W_1 \cap W_2) = 1 + 2 - 3 = 0$$

ما يعني أن المجموع $W_1 + W_2$ هو مجموع مباشر.